DURÉE : 4 heures

PROBLÈME

Soit $A = (a_{i,j})\ 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n$ une matrice carrée d'ordre n, $n \geqslant 1$, dont les coefficients $a_{i,j}$ appartiennent au corps des complexes $\mathbb{C}$; $a_{i,j}$ désigne le terme de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne.

Si z est un nombre complexe, $|z|$ désigne le module de z. Si b_k, $1 \leqslant k \leqslant p$ est une famille de p nombres réels, $\sup_k b_k$, $\inf_k b_k$ désignent respectivement la borne supérieure et la borne inférieure des p nombres b_k.

I

1° On pose

$$P_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \quad \text{et} \quad Q_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que toute valeur propre de la matrice A appartient à l'un au moins des disques $|z - a_{ii}| \leqslant P_i$ et à l'un au moins des disques $|z - a_{jj}| \leqslant Q_j$.

2° Soit $R_r = \sum_{j=1}^{n} |a_{r,j}|$ et soit $T_s = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,s}|$.

Posons $R = \sup_r R_r$ et $T = \sup_s T_s$.

Montrer que le module de chaque valeur propre de la matrice A est inférieur ou égal à inf (R, T).

3° Avec les mêmes notations qu'à la question précédente montrer que pour toute valeur propre λ de A, $|\lambda|^2$ est majoré par $W = \sup_r (R_r T_r)$, borne supérieure des produits $R_r T_r$.

4° Si l'on suppose que $d = \inf_i (|a_{ii}| - P_i)$ est strictement positif, démontrer que $|\lambda| \geqslant d$ pour toute valeur propre λ de A.

5° Soit D le déterminant de la matrice A. Montrer que

$$|D| \leqslant \inf (R^n, T^n).$$

Si de plus d est strictement positif, montrer que D est non nul. (Pour la définition de d, voir I.4°.)

6° On suppose dans cette question que tous les éléments de la matrice A, sauf éventuellement ceux de la diagonale principale, sont non nuls.

Montrer que A admet une valeur propre de module R si et seulement si on a les deux conditions

(1) $R_1 = R_2 = \ldots = R_n = R$.

(2) Il existe des nombres complexes $u, u_1, u_2, \ldots, u_n$ tels que $|u| = |u_1| = |u_2| = \ldots = |u_n| = 1$ et $a_{i,j} = |a_{i,j}|\, u u_i u_j^{-1}$, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

II

On conserve les notations et définitions du I.

On pose $R = M_0$ et en généralisant on désigne par M_1 la borne supérieure des sommes des modules des éléments de chaque ligne de la matrice A^2, par M_k celle de la matrice A^{2^k}.

1° Montrer que $M_0^2 \geqslant M_1$;

2° Démontrer que pour toute valeur propre λ de A et pour tout entier r on a l'inégalité $|\lambda|^{2^r} \leqslant M_r$;

3° Comparer la majoration précédente et celle obtenue en I.2°.

.../...

E.N.S. FONTENAY ET ST-CLOUD 1980 (maths I)
- 14 -

III

Soit toujours $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée complexe d'ordre n. Soit I la matrice unité d'ordre n. Si $f(X)$ désigne le polynôme de $\mathbb{C}[X]$

$a_0 + a_1 X \ldots + a_p X^p$, $f(A)$ désigne la matrice

$a_0 I + a_1 A \ldots + a_p A^p$. On note alors les coefficients de $f(A)$

$a_{i,j}^{(f)}$ et on pose $P_i^{(f)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}^{(f)}|$.

1° Soit $f(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et soit u un vecteur propre de A correspondant à une valeur propre λ de A.

Montrer que u est aussi un vecteur propre de $f(A)$. A quelle valeur propre correspond-il ?

2° On suppose que $n \geqslant 2$. Soient $f(X)$, $g(X)$ et $h(X)$ trois polynômes arbitraires de $\mathbb{C}[X]$ et soit λ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe des entiers r et s, distincts, compris entre 1 et n, tels que

$$|f(\lambda) - a_{r,r}^{(f)}| \leqslant P_r^{(f)}$$

$$\text{et} \quad |g(\lambda) - a_{r,r}^{(g)}| \; |h(\lambda) - a_{s,s}^{(h)}| \leqslant P_r^{(g)} P_s^{(h)}.$$

IV

On conserve les notations introduites précédemment et l'on considère toujours $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée complexe d'ordre n, avec $n \geqslant 2$.

On pose

$$M = \frac{1}{2} \sup_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ i \neq j}} \{|a_{i,i}| + |a_{j,j}| + [(|a_{i,i}| - |a_{j,j}|)^2 + 4P_iP_j]^{1/2}\}$$

et

$$m = \frac{1}{2} \inf_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ i \neq j}} \{|a_{i,i}| + |a_{j,j}| - [(|a_{i,i}| - |a_{j,j}|)^2 + 4P_iP_j]^{1/2}\}$$

1° Montrer que toute valeur propre λ de la matrice A vérifie l'une des inégalités :

$$|\lambda - a_{i,i}| \; |\lambda - a_{j,j}| \leqslant P_iP_j \qquad i,j = 1, 2, \ldots, n, \; i \neq j$$

2° Montrer que toute valeur propre λ de A est telle que

$$|\lambda| \leqslant M$$

3° Comparer les majorations obtenues en IV.2° et I.2°.

4° On suppose que pour tout i et pour tout j, $i \neq j$, on a

$$|a_{i,i}\, a_{j,j}| \underset{\neq}{>} P_i P_j.$$

Soit λ une valeur propre de A

a. Montrer que $|\lambda| \geqslant m \underset{\neq}{>} 0$.

b. Si D désigne le déterminant de A, en déduire que

$$0 < m^n \leqslant |D| \leqslant M^n$$

5° Soient a et T deux nombres réels strictement positifs.

On considère l'équation suivante où z est un complexe.

(E) $$|z - a|^2 \; |z + a|^2 = T^2.$$

Soit (O) l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y) tels que, si $z = x + iy$, z vérifie (E).

Donner l'équation polaire de (O) et étudier rapidement cet ensemble.

6° On suppose désormais que les éléments de la diagonale principale de A sont des nombres réels strictement positifs et que pour tout i et pour tout j, $i \neq j$, on a

$$a_{i,i}\, a_{j,j} \underset{\neq}{>} P_i P_j.$$

a. Montrer que pour toute valeur propre λ de A on a :

$$\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant m > 0,$$

si $\mathrm{Re}(\lambda)$ désigne la partie réelle du nombre complexe λ.

b. Si le polynôme caractéristique de A est à coefficients réels, montrer que le déterminant de A est positif.

c. Si A est une matrice hermitienne, montrer que les valeurs propres de A sont positives et supérieures ou égales à m.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail